

Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzel

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 5 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
28. November 2021

Aufgabe 1 (jeweils 2 Punkte). Entscheiden Sie mit Beweis in jedem der folgenden Fälle, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert:

$$(i) \ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad (ii) \ a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}, \quad (iii) \ a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n},$$

$$(iv) \ a_n = \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}, \quad (v) \ a_n = \frac{2^n n!}{n^n}.$$

Wann liegt sogar absolute Konvergenz vor?

Hinweis: Für diese Aufgabe dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass der Grenzwert

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

existiert und $2 < e < 3$ erfüllt.

Lösung. (i) Eine Umformung wie im letzten Übungsblatt liefert

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{3n}.$$

Also folgt durch Vergleich mit der harmonischen Reihe, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

(ii) Der zusätzliche Faktor von n^{-1} macht die Reihe konvergent. Dazu schätzen wir diesmal etwas anders ab:

$$a_n = \frac{1}{n(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ nach Vorlesung konvergent ist, konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (sogar absolut) nach dem Majorantenkriterium.

(iii) Unser Ziel ist, das Leibniz-Kriterium anzuwenden. Dazu schreiben wir

$$a_n = (-1)^n b_n,$$

wobei

$$b_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}.$$

Es gilt $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es verbleibt zu zeigen, dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Wir zeigen zunächst, dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^n} = \frac{((n+1)^2)^n}{(n(n+2))^n} = \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \right)^n > 1,$$

oder äquivalent $b_{n+1} < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq 0$. Weiter ist

$$b_n = \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n-1} \leq \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Nach dem Hinweis konvergiert der zweite Faktor, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$. Das liefert mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Produkten konvergenter Folgen

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 0 \cdot e = 0,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ folgt nun aus dem Leibniz-Kriterium. Es liegt jedoch keine absolute Konvergenz vor, denn

$$|a_n| = b_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > \frac{1}{n}$$

und die harmonische Reihe ist divergent.

(iv) Die Reihe ist divergent, was erneut aus dem Vergleich mit der harmonischen Reihe folgt. In der Tat folgt für alle $n \geq 3$

$$a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{1+\frac{4}{n}}{n-3+\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n}.$$

(v) Wir wollen das Quotientenkriterium anwenden, dazu berechnen wir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2(n+1)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 2 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n.$$

Aus dem Hinweis und den Rechenregeln für Grenzwerte folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e} < 1,$$

also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium. □

Aufgabe 2 (10 Punkte). Bestimmen Sie alle Werte $s \in \mathbb{R}$ (mit Beweis), für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^s$$

konvergiert.

Hinweis: Ungleichungen wie im Hinweis von Übungsblatt 4, Aufgabe 3 sowie das Majorantenkriterium können nützlich sein.

Lösung. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ divergiert für $s < 0$ die Folge $(x_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$, ist also insbesondere keine Nullfolge und die Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^s$ konvergiert nicht. Wir machen weiter mit dem Fall $s > 1$. Dazu verwenden wir wie im Hinweis angedeutet die Ungleichung

$$\frac{(1+l)^n}{n^k} \geq \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot n$$

für alle $l > 0, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2k+2$ (siehe Beweis Übungsblatt 4, Aufgabe 3). Wir setzen $l = x_n$ und erhalten

$$\frac{n}{n^k} \geq \frac{(\sqrt[k]{n} - 1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} \cdot n.$$

Umstellen dieser Ungleichung liefert

$$\sqrt[k]{n} - 1 \leq C_k \frac{1}{n^{k/(k+1)}}$$

mit (von n unabhängiger) Konstante $C_k := 2 \cdot ((k+1)!)^{1/(k+1)}$. Potenzieren beider Seiten mit s ergibt

$$(\sqrt[k]{n} - 1)^s \leq C_k^s \frac{1}{n^{sk/(k+1)}}. \quad (1)$$

Fordern wir nun $k > \frac{1}{s-1}$ (solch ein k existiert nach dem archimedischen Axiom), so folgt

$$\frac{sk}{k+1} = s \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) > s \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{s-1} + 1}\right) = s \left(1 - \frac{s-1}{s}\right) = 1.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-sk/(k+1)}$ nach Vorlesung konvergiert, folgt aus Ungleichung (1) und dem Majorantenkriterium auch die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[k]{n} - 1)^s$ für alle $s > 1$.

Es verbleibt, den Fall $0 \leq s \leq 1$ zu untersuchen. Wegen $0 < x_n < 1$ ist $x_n^s \geq x_n$. Wenn wir also zeigen können, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty,$$

so folgt auch $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^s = +\infty$ für alle $0 \leq s < 1$ nach dem Majorantenkriterium.

In der Tat: Für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt wegen $\sqrt[k]{n} \leq \sqrt[k]{n^k}$, dass

$$\frac{1}{\sqrt[k]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[k]{n^k}} \quad \text{oder} \quad n^{-\frac{1}{k}} \geq n^{-\frac{k}{k}}.$$

Damit schließen wir

$$n^{1-\frac{1}{n}} = n \cdot n^{-\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} n^{-\frac{1}{n}} \geq \sum_{k=0}^{n-1} n^{-\frac{k+1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sum_{k=0}^{n-1} n^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n} - 1},$$

wobei wir die geometrische Summenformel verwendet haben. Umstellen ergibt dann für alle $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{n} - 1 \geq \frac{n-1}{n^{2-\frac{1}{n}}} \geq \frac{n}{2n^{2-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2n} \geq \frac{1}{2n},$$

also divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nach Vergleich mit der harmonischen Reihe.

Zusammenfassend: $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^s$ ist divergent für alle $s \in]-\infty, 1]$ und konvergent für alle $s \in]1, \infty[$. $\square$

Aufgabe 3 (5+5 Punkte). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen positiver reeller Zahlen mit der Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

- (i) Zeigen Sie: Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sind entweder beide konvergent oder beide divergent.
- (ii) Entscheiden Sie (mit Beweis), für welche $s \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^s}} - 1 \right)$$

konvergiert.

Lösung. (i) Wir behaupten, dass wir ein $N \in \mathbb{N}$ wählen können mit

$$\frac{a_n}{2} \leq b_n \leq 2a_n. \quad (2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Angenommen, die erste Ungleichung stimmt nicht. Dann gibt es für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit

$$\frac{a_n}{2} > b_n.$$

Das bedeutet aber für ein solches n , dass

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| \geq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| - 1 = \frac{a_n}{b_n} - 1 > 2 - 1 = 1,$$

was ein Widerspruch zur gegebenen Konvergenz ist. Beachte, dass wir beim Weglassen des Betrags die Positivität der Folgenglieder benutzt haben (ohne diese Annahme ist die Aussage aus der Aufgabenstellung im Allgemeinen falsch!). Die Gültigkeit der zweiten Ungleichung zeigt man analog. Mit (2) folgt die gewünschte Aussage nun aber sofort aus dem Majorantenkriterium.

(ii) Für $s \leq 0$ können wir Konvergenz sofort ausschließen, denn die Reihenglieder bilden in diesem Fall keine Nullfolge. Sei also $s > 0$. Unser Ziel ist, Aufgabenteil (i) anzuwenden. Dazu setzen wir $a_n := \sqrt{1 + \frac{1}{n^s}} - 1 > 0$ und $b_n := \frac{1}{2n^s} > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und berechnen

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\frac{1}{2n^s}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^s}} - 1 \right) = \frac{2}{\frac{1}{n^s}} \frac{\frac{1}{n^s}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^s}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^s}} + 1}.$$

Hier haben wir die Identität $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ verwendet. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

also konvergiert nach Aufgabenteil (i) die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $s > 1$ (wie aus der Vorlesung bekannt). $\square$

Aufgabe 4 (8 + 2 Punkte). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist.

(i) Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie das Cauchy-Kriterium und Abelsche partielle Summation aus Tutoriumsblatt 5, Aufgabe 3.

(ii) Gilt die Aussage aus (i) auch für alle beschränkten Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die nicht notwendigerweise monoton sind? Beweisen Sie ihre Behauptung!

Beweis. Wir wollen das Cauchy-Kriterium anwenden, also zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| < \varepsilon$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m \geq N$. Wir setzen zunächst $S_0 := 0$ und

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_k = S_k - S_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $M \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke sowohl für $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch für $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (beide Folgen besitzen obere Schranken, da sie konvergent sind. Wähle dann das Maximum beider oberer Schranken). Definiere weiter $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (letzterer Grenzwert existiert, da monotone, beschränkte Folgen nach Vorlesung konvergieren). Nach den Rechenregeln für Grenzwerte ist dann $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n S_n = bS$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $m, n \geq \tilde{N}$

$$|b_n S_n - bS| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |b_m S_m - bS| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (3)$$

Setze $N := \tilde{N} + 1$ und seien $n > m \geq N$ (der Fall $n = m$ folgt analog und ist leichter). Dann folgt aus Abelscher partieller Summation

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k b_k &= b_n S_n - S_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) \\ &= b_n S_n - S_{m-1} b_m + \sum_{k=m-1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} (b_{m-1} - b_m) \\ &= b_n S_n - S_{m-1} b_{m-1} + \sum_{k=m-1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

Wegen unserer Wahl von N und $\tilde{N}$ in (3) ist $m-1 \geq N-1 = \tilde{N}$ und damit

$$\begin{aligned} |b_n S_n - b_{m-1} S_{m-1}| &= |b_n S_n - bS + bS - b_{m-1} S_{m-1}| \\ &\leq |b_n S_n - bS| + |bS - b_{m-1} S_{m-1}| < \frac{2}{3} \varepsilon, \end{aligned}$$

also

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq \frac{2}{3} \varepsilon + \left| \sum_{k=m-1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) \right|.$$

Den letzten Term schätzen wir wie folgt mit der Dreiecksungleichung ab:

$$\left| \sum_{k=m-1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) \right| \leq \sum_{k=m-1}^{n-1} |S_k| |b_k - b_{k+1}| \leq M \sum_{k=m-1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}|.$$

Da $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton ist (egal ob fallend oder steigend), ist

$$\sum_{k=m-1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \left| \sum_{k=m-1}^{n-1} b_k - b_{k+1} \right| = |b_{m-1} - b_n| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Kombinieren der letzten Ungleichungen liefert die Behauptung.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Leibnizkriterium und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Natürlich ist aber $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht monoton. □